

# El espectro del riemannio

La función zeta de Riemann, los números primos, los núcleos atómicos pesados: nociones matemáticas que parecen muy abstractas y fenómenos físicos muy concretos exhiben unas mismas correlaciones estadísticas

Brian Hayes

**E**n 1972 se conocen Hugh Montgomery, joven experto en teoría de números, y Freeman Dyson, físico, en Fuld Hall, uno de los edificios del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Montgomery le cuenta a Dyson que las correlaciones entre pares de puntos de los ceros de la función zeta de Riemann obedecen a

$$1 - \left( \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} \right)^2$$

Dyson se maravilla. ¿Se ha dado cuenta —le pregunta a Montgomery— de que se trata de la función de correlación entre pares de autovalores de una matriz hermítica aleatoria? ¿Y de que es el modelo de los niveles de energía de un núcleo pesado, de, digamos, el U-238?

El encuentro casual de Montgomery y Dyson reveló una conexión insospechada entre áreas, en apariencia muy alejadas, de la física y las matemáticas. ¿Por qué habría de describir una misma ecuación tanto la estructura de un núcleo atómico como la de una sucesión que pertenece al meollo mismo de la teoría de números? ¿Y qué tienen que ver las matrices aleatorias con uno u otro de estos dominios? En años recientes, han hecho aparición en lugares insospechados: en los solitarios con cartas, los gases unidimensionales o los sistemas cuánticos caóticos. ¿Se trata de una mera coincidencia o se nos esconde algo entre bastidores?

## El espectro del intercolumnio

**U**na cuestión que se plantea en todas las ciencias es la distribución —sea en el espacio, en el tiempo o en alguna otra dimensión más abstracta— de los entes que estudian. En astronomía se desea conocer de qué modo están diseminadas las galaxias por el universo; en biología podría interesar la distribución de los genes a lo largo de un filamento de cromatina; en sismología, la pauta de los terremotos en el tiempo; un matemático cavilará sobre la dispersión de los números primos entre los enteros. En este artículo con-

sideraré solamente distribuciones unidimensionales y discretas, en las que la posición de los elementos admite una representación gráfica sobre una línea recta.

Cabe comparar esas distribuciones, definidas matemáticamente unas, otras deducidas de medidas u observaciones, por medio de diagramas a modo de espectros; para ello ajustemos la escala de manera que en el espacio asignado entren en cada caso exactamente 100 rayas (véase la figura 1). La distancia media entre valores será la misma en todos ellos; las pautas, empero, varían mucho. Por ejemplo, en una serie relativa a la distribución de terremotos las rayas tienden a apiñarse, reflejo, sin duda, de algún mecanismo geofísico. Las fluctuaciones de frecuencia más baja observadas en los anillos de los árboles deben de tener causas tanto biológicas como climáticas. Por otra parte, vaya uno a saber por qué se distribuyen los puentes o túneles de una autovía como lo hacen.

Al analizar este tipo de pautas, poca esperanza cabe de pronosticar las posiciones de un elemento de una serie. Se busca una comprensión estadística, la descripción de una configuración típica, no la de una particular y concreta. Me centraré en dos medidas estadísticas: la distancia hasta el vecino más próximo y la función de correlación entre pares de puntos.

No hay distribuciones más sencillas que las periódicas. Imaginemos los barrotes de una verja o el monótono latido de un reloj de pared: los intervalos que median entre dos elementos consecutivos de la serie son exactamente iguales. El contrapunto de tal configuración regular y repetitiva sería una configuración aleatoria. Y entre estos extremos, el orden completo y el total desorden, existe una variedad de posibilidades intermedias, como una valla de barrotes o una columnata de columnas que “bailen”, movidos al azar hacia acá o hacia allá unos centímetros.

La representación gráfica de las distancias al vecino más cercano permite distinguir fácilmente las configuraciones periódicas, aleatoria y “movida” (véase la figura 2). En el caso de la distribución periódica, la gráfica se reduce a un solo punto: la separación es, en todos los casos, la misma. Más interesante es el es-



**1. CADA UNA DE ESTAS DISTRIBUCIONES** unidimensionales consta de 100 niveles. Los espectros, de derecha a izquierda, corresponden a: una formación periódica de líneas equidistantes; una sucesión aleatoria; una formación periódica perturbada por un ligero "baile" aleatorio de cada nivel; los estados energéticos del núcleo del erbio-166, todos con los mismos números cuánticos de espín y paridad; los 100 autovalores centrales de una matriz simétrica aleatoria de orden 300; las posiciones de los ceros de la función zeta de Riemann situados justo por encima del cero  $10^{22}$ -ésimo; un centenar de números primos consecutivos a partir de 103.613; la posición de las 100 variantes elevadas y soterradas más septentrionales de la autopista interestatal 85 estadounidense; posiciones de las traviesas de una vía muerta de ferrocarril; posiciones de los anillos de crecimiento, desde 1884 hasta 1983, de un abeto del Monte Santa Helena, estado de Washington; fechas de los terremotos de California de magnitud 5,0 o mayor entre 1969 y 2001; longitudes de 100 paseos consecutivos en bicicleta.

cima del cero  $10^{22}$ -ésimo; un centenar de números primos consecutivos a partir de 103.613; la posición de las 100 variantes elevadas y soterradas más septentrionales de la autopista interestatal 85 estadounidense; posiciones de las traviesas de una vía muerta de ferrocarril; posiciones de los anillos de crecimiento, desde 1884 hasta 1983, de un abeto del Monte Santa Helena, estado de Washington; fechas de los terremotos de California de magnitud 5,0 o mayor entre 1969 y 2001; longitudes de 100 paseos consecutivos en bicicleta.

pectro de distancias al vecino más cercano en el caso de la distribución aleatoria: la frecuencia de una separación  $x$  cualquiera es proporcional a  $e^{-x}$ . Esta ley exponencial negativa entraña que la separación más probable entre valores es la mínima. A una pauta movida le corresponde una curva acampanada: los intervalos definidos por los vecinos más cercanos se atienen a una distribución gaussiana.

La función de correlación por pares mencionada por Montgomery y Dyson capta parte de la misma información que el espectro de los vecinos más cercanos, pero la calcula de diferente modo. La función de correlación cuenta, para cada distancia  $x$ , cuántos pares de valores están separados por  $x$ , sin que importe si corresponden a vecinos inmediatos o no. La función de correlación por pares de una distribución puramente aleatoria es una recta horizontal, pues todos los intervalos son equiprobables. Conforme la distribución se va haciendo más ordenada, aparecen en la función una serie de jorobas y ondulaciones. En el caso de una distribución periódica, la gráfica se compone de una serie de agudas puntas.

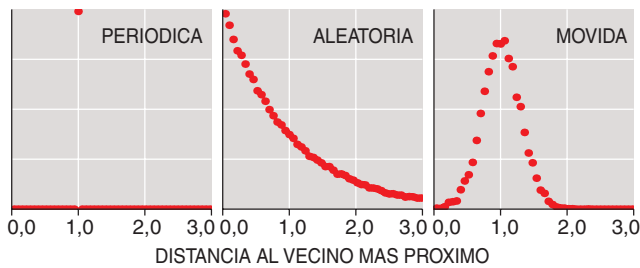
Hace treinta años, H. I. Liou, James Rainwater y sus colaboradores de la Universidad de Columbia midieron con gran precisión los niveles de energía del nú-

cleo atómico de una "tierra rara", el erbio-166. Un examen superficial de ese espectro no percibirá regularidades evidentes; no obstante, su textura difiere mucho de la correspondiente a una distribución puramente aleatoria. En particular, el espectro del erbio tiene menor número de niveles muy próximos que una distribución aleatoria. Es como si los niveles de energía nuclear contaran con muelles que los mantuviesen separados. Esta "repulsión de niveles" caracteriza a todos los núcleos pesados.

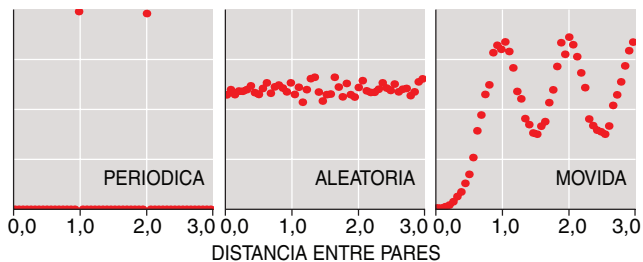
## Erbio y autovalio

¿Qué tipo de estructura matemática podría describir un espectro así? Aquí es donde entran en la escena los autovalores, o valores propios, de las matrices hermíticas aleatorias mencionados al principio. Las enunció con esta finalidad, en el decenio de 1950, el físico Eugene P. Wigner, que también enseñó en Princeton. Imaginemos que se lo explica a un alumno un poco lento:

*Wigner:* Vamos a ver cómo se construye una matriz hermítica aleatoria. Empezamos con un casillero cuadrado, como un tablero de ajedrez, y en cada casilla ponemos un número elegido al azar...



**2. LA DISTANCIA AL VECINO más próximo da un sencillo esbozo estadístico de una distribución. En el caso de una serie periódica, la curva tiene un único punto no nulo; si los valores son aleatorios, sigue una ley exponencial; la serie “movida” genera una gráfica de aspecto gaussiano.**



**3. LA FUNCION DE CORRELACION entre pares de puntos mide el número de pares de valores que están separados por una distancia dada cualquiera. En el caso de un conjunto aleatorio de valores, todos los intervalos son igual de probables, mientras que la curva correspondiente a una serie “movida” presenta un máximo en cada múltiplo de la media de la separación al vecino más próximo.**

*Estudiante:* ¿Qué clase de número? ¿Real? ¿Complejo?

*Wigner:* Cualquiera de los dos sirve, pero, por sencillez, quedémonos aquí sólo con números reales.

*Estudiante:* ¿Y con qué tipo de aleatoriedad? ¿Han de tener distribución uniforme, gaussiana o...?

*Wigner:* Es costumbre tomarlos con una distribución gaussiana de media 0 y varianza 1, pero no es esencial hacerlo así. Lo esencial es que la matriz sea hermitica. Las matrices hermiticas —así llamadas en recuerdo del matemático francés Charles Hermite— poseen una simetría peculiar. Su diagonal principal, que va desde el ángulo superior izquierdo hasta el inferior derecho, viene a ser como un espejo, de manera que los elementos del triángulo superior quedan reflejados en el triángulo inferior.

*Estudiante:* Entonces la matriz no es aleatoria del todo, ¿verdad?

*Wigner:* Si se empeña usted, la llamaremos semialeatoria. Llenamos la mitad superior, con números reales, como hemos convenido para que sea más sencillo, tomados al azar, y después los copiamos en la mitad inferior. Tenemos así una matriz hermitica aleatoria y cuando calculamos sus autovalores...

*Estudiante:* Pero... ¿cómo hago para calcularlos?

*Wigner:* ¡Vaya a Matlab, el programa de ordenador, y utilice la función “eig”!

Los autovalores o valores propios reciben una diversidad de nombres, todos igualmente opacos: valores característicos, raíces latentes, espectro de la ma-

triz. Las definiciones, por su parte, son también más numerosas que útiles. Aquí, para nuestro propósito, baste decir que toda matriz cuadrada  $N \times N$  lleva asociada una ecuación polinómica de grado  $N$ , y que los autovalores son las raíces de tal ecuación (habrá, pues,  $N$  de ellos, distintos o no). En el caso de matrices cualesquiera, se tratará, en general, de números complejos, incluso aunque los elementos de la matriz sean números reales, pero la simetría de las matrices hermiticas garantiza que todos sus valores propios serán reales. Podremos, pues, ordenarlos de menor a mayor a lo largo de una recta, como si fueran niveles de energía. Dispuestos de esa forma, se parecen mucho a los niveles energéticos de un núcleo pesado. Claro está, los autovalores no coinciden, valor por valor, con el espectro de ningún núcleo particular, pero la semejanza estadística es grande.

La primera vez que oí hablar de la conjetura de la matriz aleatoria en física nuclear, lo que más me sorprendió no fue que pudiera ser cierta, sino que alguien se hubiese topado con ella. Pero no se trataba de una suposición excéntrica. En la formulación de la mecánica cuántica de Werner Heisenberg, el estado interno de un átomo, o de un núcleo, está representado por una matriz hermitica, cuyos autovalores son los niveles energéticos del espectro. Si conociéramos todos los elementos de cada fila y columna de esta matriz, podríamos calcular el espectro con toda exactitud. No tenemos, como es obvio, ese conocimiento, pero según la conjetura de Wigner los parámetros estadísticos del espectro no acusan una gran sensibilidad a los elementos específicos de la matriz. Por lo tanto, si nos limitamos a tomar una matriz típica —una matriz grande, cuyos elementos hayan sido elegidos atendiendo a una cierta distribución estadística—, las predicciones deberían ser aproximadamente correctas. Dyson y otros elaboraron después las predicciones del modelo con mayor detalle.

## Eulerio y riemannio

Dejemos ahora la física nuclear y vayamos a la teoría de números y la función zeta.

La sucesión más famosa de la teoría de números es la de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11... La tendencia general de esta sucesión es bien conocida. En las cercanías de cualquier número entero grande  $x$ , la proporción de números primos vale alrededor de  $1/\log x$ : aunque los primos prosiguen sin fin, se van enrareciendo conforme se avanza en la recta numérica. A esta cosecha cada vez más pobre se superponen fluctuaciones de menor escala, difíciles de comprender con detalle. La sucesión de números primos parece al azar y errática, y sin embargo no es posible que la distancia al vecino más próximo tenga la misma distribución estadística que un espectro de verdad aleatorio. La distancia mínima entre dos números primos (exceptuado un caso anómalo) es 2. Los pares separados por esta distancia mínima, como 29 y 31, se llaman primos gemelos. No se sabe todavía si hay una infinidad de ellos.

Para analizar esta distribución, aparte de explorar directamente los números primos, cabe tomar un rodeo: la función zeta de Riemann. Esta función, parte de cuyo nombre le fue dado por el propio Bernhard Riemann, la otra en honor suyo, había sido estudiada ya por Leonhard Euler en el siglo XVIII, quien la definió como la suma, extendida a todos los números naturales, de la siguiente serie:

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}$$

Con otras palabras, se toma cada número natural  $n$ , desde 1 hasta infinito, se le eleva a la potencia  $s$ , se toma el valor recíproco y se suma toda la serie. La suma es finita siempre que  $s$  sea mayor que 1. Por ejemplo, Euler demostró que  $\zeta(2)$  es igual a  $\pi^2/6$ , aproximadamente, 1,645:

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Euler demostró también una notable identidad que iguala la fórmula del sumatorio, que tiene un término por cada número natural, a un producto infinito que contiene un factor por cada número primo. Esta segunda definición establece:

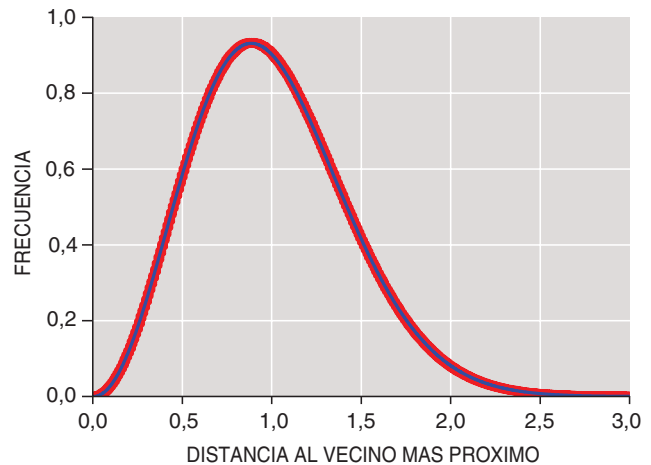
$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

En este caso, la receta consiste en tomar cada número primo  $p$ , desde 2 hasta infinito, elevarlo a la potencia  $s$ , y después, tras algunos cálculos aritméticos, multiplicar los factores correspondientes a todos los valores de  $p$ . El resultado es el mismo que en la suma infinita. La conexión entre una suma extendida a todos los enteros y un producto sobre todos los números primos era ya un indicio de que la función zeta podría tener algo que decir sobre la distribución de los números primos en el conjunto de los enteros. Las dos series, en efecto, están íntimamente relacionadas.

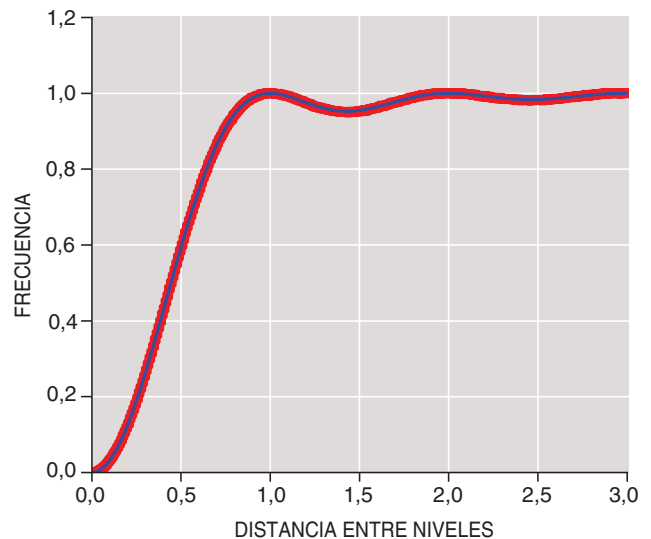
La contribución de Riemann, en 1859, consistió en extender el dominio de la función zeta, de modo que fuera aplicable no sólo cuando  $s$  es un número real mayor que 1, sino cuando  $s$  es un número cualquiera —positivo o negativo, real o complejo—, con la única excepción de los números cuya parte real es igual a 1. La función oscila desmesuradamente sobre gran parte del plano complejo, cruzando infinitas veces de los valores positivos a los negativos. Se llama a los puntos de cruce, donde  $\zeta(s) = 0$ , “ceros de la función zeta”. Existe una sucesión infinita de estos ceros a lo largo del eje real negativo, a los que no se concede gran interés. Riemann llamó la atención sobre una diferente sucesión infinita de ceros, situados por arriba y por debajo del eje real en la franja vertical del plano complejo que contiene a todos los números cuya parte real se encuentra entre 0 y 1. Riemann calculó la posición de los tres primeros de estos ceros y descubrió que se hallan justamente en el centro de la franja, sobre la “recta crítica” formada por los complejos cuya parte real es 1/2. Riemann, basándose en esta evidencia y en su increíble intuición, conjeturó que *todos* los ceros complejos de la función zeta se encuentran sobre la recta crítica. Esta conjetura

es la llamada “hipótesis de Riemann”, ampliamente tenida por el hueso más duro de roer y jugoso de toda la matemática contemporánea.

En los años transcurridos desde que Riemann consiguió localizar los tres primeros ceros de la función zeta, han sido descubiertos unos poquitos más. Una red de cómputo cooperativo llamada ZetaGrid, organizada por Sebastian Wedeniwski, de IBM, ha comprobado 385.000 millones de ellos. Hasta el momento, todos se encuentran en la recta crítica. Existe incluso una demostración de que la recta crítica contiene una infinidad de tales



**4. LOS CEROS DE LA FUNCION ZETA** de Riemann presentan separaciones al vecino más próximo que satisfacen cerca las predicciones de la teoría de matrices aleatorias. Los puntos rojos representan las posiciones de mil millones de ceros de zeta situados por encima del  $10^{23}$ -ésimo de tales ceros; la línea azul corresponde a la separación prevista. Según datos de Andrew M. Odlyzko.



**5. TAMBIEN CUMPLE LO PREVISTO** la función de correlación de pares de puntos correspondiente a mil millones de ceros de zeta cercanos al  $10^{23}$ -ésimo. La curva teórica, azul, es la función  $1 - (\text{sen}(\pi x)/\pi x)^2$ , de la que hablaron Montgomery y Dyson en 1972. Obsérvense los indicios de “repulsión de nivel”: los ceros poco separados son raros. Según datos de Andrew M. Odlyzko.

ceros, pero lo que se necesita es una demostración de que no hay ninguno situado fuera de ella. Tal objetivo sigue estando fuera de nuestro alcance.

Otros aspectos de la función zeta han sido objeto de escrutinio en el ínterin. Suponiendo que todos los ceros se encuentren verdaderamente sobre la recta crítica, ¿cómo se distribuyen a lo largo de ella? ¿Cómo varía su densidad en función de la “elevación”,  $T$ , por encima o por debajo del eje real?

La tendencia general de la abundancia de ceros de la zeta, como la de los primos, es conocida. Va en sentido contrario a la de éstos: mientras que los números primos son cada vez más raros a medida que crece su tamaño, los ceros de zeta van siendo más frecuentes al ir aumentando la altura. El número de ceros en el entorno de una altura  $T$  es proporcional a  $\log T$ , lo que entraña un incremento lento. Pero, como ocurría con los primos, tal tendencia no es regular, y los detalles de la fluctuación son de suma importancia. Los huecos y los apiñamientos en la sucesión de ceros de zeta codifican información sobre propiedades correspondientes de la sucesión de los números primos.

El trabajo de Montgomery sobre la función de correlación de pares de puntos de los ceros de zeta constituyó un paso importante para comprender la estadística de la fluctuación. Y el encuentro en Fuld Hall, en el que salió a la luz que la fórmula de correlación de Montgomery es la misma que la correspondiente para los valores propios de las matrices aleatorias, fue la chispa que encendió un renovado interés. La función de correlación implica una repulsión entre niveles de los ceros, exactamente igual que ocurre en los núcleos, con la consiguiente deficiencia de ceros muy poco separados.

El resultado de Montgomery no es un teorema: su demostración se apoya en la presunta veracidad de la hipótesis de Riemann. Pero la exactitud de la función de correlación se puede verificar mediante la comparación de la predicción teórica con los valores computados de los ceros de zeta. M. Odlyzko ha llevado a lo largo de los veinte últimos años la computación de los ceros de zeta hasta cimas heroicas con el fin de realizar tales comprobaciones. No basta para tal propósito la comprobación de que los ceros yacen sobre la recta crítica; el programa ha de medir con precisión la altura de cada cero en dicha recta, tarea mucho más exigente. Uno de los primeros trabajos de Odlyzko llevaba por título “El cero número  $10^{20}$  de la función zeta de Riemann y 175 millones de sus vecinos”. Desde entonces ha procedido a computar series todavía más largas de ceros consecutivos, situados a alturas todavía más elevadas, y explora en la actualidad el entorno del cero de lugar  $10^{23}$ . La concordancia entre las correlaciones pronosticadas y sus medidas es verdaderamente notable; mejora al aumentar la altura.

## El operador del universo

Esta aparente vinculación entre los autovalores matriciales, la física nuclear y los ceros de la función zeta, ¿será mera chiripa? Pudiera ser, aunque a un

universo donde se produjesen de forma casual tales coincidencias podría considerársele todavía más extraño que a uno con conexiones causales misteriosas.

Otra explicación posible es que la distribución estadística observada en estos tres casos (y en varios otros que no he mencionado) constituye simplemente una forma muy habitual de organización de las cosas, algo análogo a la distribución normal de Gauss, que se presenta por doquier en la naturaleza porque abundan los procesos que conducen a ella. Siempre que se suma un gran número de aportaciones independientes, el resultado es la conocida curva acampanada de la distribución gaussiana. Tal observación constituye, en esencia, el teorema del límite central. Es posible que algún principio semejante sea responsable de la ubicuidad de la distribución de autovalores. En tal caso, el hecho de que Montgomery y Dyson hayan dado con la misma función de correlación no sería, a fin de cuentas, un gran milagro.

Un punto de vista distinto presume que los ceros de la función zeta representan un verdadero espectro: una serie de niveles energéticos como los del núcleo del erbio, aunque generados por un elemento ficticio, definido matemáticamente, el “riemannio” (lo conocí por una conferencia de Oriol Bohigas, de la Universidad de París-Sur). Tal idea se remonta a David Hilbert y a George Pólya, quienes sugirieron (cada uno por su lado) que los ceros de la función zeta pudieran ser los valores propios de un “operador” hermítico desconocido. A primera vista, la noción de operador parece muy alejada del concepto de matriz, pues se trata de una función que actúa sobre funciones. Pero los operadores lineales también tienen autovalores, y un operador hermítico posee unas propiedades de simetría que hacen que todos los suyos sean números reales, exactamente como en el caso de una matriz hermítica.

Si la conjetura de Hilbert-Pólya fuese correcta, el éxito de los métodos basados en matrices aleatorias se debería, en esencia, a la misma razón por la que dan buenos resultados en física nuclear, a saber, que la estructura fina de una matriz grande (u operador) tiene menor importancia que sus simetrías globales, por lo que cualquier matriz típica que posea las simetrías debidas producirá resultados estadísticamente similares. Tras estas aproximaciones acecha algún operador hermítico bien determinado, que determina la posición exacta de todos los ceros de la función zeta y, en consecuencia, la distribución de los números primos.

## Bibliografía complementaria

RANDOM MATRICES. Madan Lal Mehta. Segunda edición. Academic Press; Boston, 1991.

THE RIEMANNIUM. P. Leboeuf, A. G. Monestira y O. Bohigas en *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 6; págs. 205-210; 2001.

PATTERNS IN EIGENVALUES. THE 70TH JOSIAH WILLARD GIBBS LECTURE. Persi Diaconis en *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 40, págs. 155-178; 2003.

© *American Scientist Magazine*.